

Il legame elastico

Stendiamo il nostro campo d'azione su un particolare tipo di legame costitutivo: il legame elastico.

Nel caso generico, se esiste $de = \underline{\underline{G}}^T \cdot d\underline{\underline{\epsilon}}$, densità di en. p.t. tensoriale elastica, $d\underline{\underline{\epsilon}}$ è un differenziale esatto e il materiale è iperelastico o elastico alla Green. È in grado di assorbire tutta l'energia che ad esso viene somministrata senza dissiparne. Esistendo l'energia potenziale elastica si può scrivere:

$$L = \int_V \int_0^{\underline{\underline{\epsilon}}_F} de \, dV = \int_V [e(\underline{\underline{\epsilon}}) - e(0)] \, dV$$

Il lavoro interno di deformazione dipende solo dagli estremi della trasformazione e non dal cammino compiuto lungo una linea chiusa e perciò nullo. Si definisce energia potenziale elastica:

$$\mathcal{E}(\underline{\underline{\epsilon}}) := \int_V e(\underline{\underline{\epsilon}}) \, dV$$

Si sceglie arbitrariamente $e(0) = 0 \Rightarrow \mathcal{E}(0) = 0$. Quindi

$$L = \int_V e(\underline{\underline{\epsilon}}_F) \, dV = \mathcal{E}(\underline{\underline{\epsilon}}_F)$$

Il lavoro dipende solo dai valori finali delle forze di volume e di superficie che portano il corpo dallo stato naturale a quello finale.

Legame iperelastico diretto

Dal punto di vista matematico possiamo ottenere un'importante conseguenza:

$$\exists e(\underline{\underline{\epsilon}}) \Leftrightarrow de = \underline{\underline{G}}^T \cdot d\underline{\underline{\epsilon}} \text{ diff. esatto}$$

$$\Rightarrow de(\underline{\underline{\epsilon}}) = \left[\frac{\partial e(\underline{\underline{\epsilon}})}{\partial \underline{\underline{\epsilon}}} \right]^T d\underline{\underline{\epsilon}}, \quad \underline{\underline{G}} = \frac{\partial e(\underline{\underline{\epsilon}})}{\partial \underline{\underline{\epsilon}}} \text{ è lo jacobiano}$$

Abbiamo espresso il legame costitutivo $\underline{\underline{G}} = \underline{\underline{G}}(\underline{\underline{\epsilon}})$ mediante la derivata di $e(\underline{\underline{\epsilon}})$ rispetto a $\underline{\underline{\epsilon}}$. La forma è quindi quella di uno jacobiano, che in questo caso è associata alla trasformazione. Allora $e(\underline{\underline{\epsilon}})$ si configura come un potenziale delle tensioni $\underline{\underline{G}}$.

In forma indiciale:

$$G_{ij}(\underline{\underline{\epsilon}}_j) = \frac{\partial e(\underline{\underline{\epsilon}}_j)}{\partial \epsilon_{ij}}$$

Cioè:

$$G_{ij} = \frac{\partial e}{\partial \epsilon_{ij}}$$

Affinché sia derivabile, $e(\underline{\underline{E}})$ deve essere regolare. Per comodità si impone che e' flessione sia positivo

$$\underline{\underline{S}} \underline{\underline{E}}^T \cdot \left[\frac{\partial^2 e(\underline{\underline{E}})}{\partial \underline{\underline{E}}^2} \right] \underline{\underline{S}} \underline{\underline{E}} > 0 \quad \forall \underline{\underline{E}} \neq \underline{\underline{0}}$$

Ricordiamo che il $\underline{\underline{H}}$ flessione è la matrice quadrata $(n \times n)$ delle derivate parziali seconde di una funzione in n var.abili. Dalla doppia derivazione discende la presenza di $\underline{\underline{S}} \underline{\underline{E}}^T$ e $\underline{\underline{S}} \underline{\underline{E}}$.

Il legame è dunque monotonico crescente ($\underline{\underline{E}} \uparrow, \underline{\underline{G}} \uparrow$). Dato che $e(\underline{\underline{0}}) = 0$ e $\frac{\partial e(\underline{\underline{0}})}{\partial \underline{\underline{E}}} = \underline{\underline{0}}$ (stato naturale) si ha $e(\underline{\underline{E}}) > 0 \quad \forall \underline{\underline{E}}$, cioè l'energia potenziale elastica è definita positiva. Per $\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{0}}$ si ha il minimo di energia.

La matrice elastica $\underline{\underline{C}}$

Il legame iperelastico lineare è verificato se $e(\underline{\underline{E}})$ è una forma quadratica nelle $\underline{\underline{E}}$. Infatti derivando rispetto a $\underline{\underline{E}}$ si ottiene una forma lineare, quella che esprime il legame lineare tra $\underline{\underline{E}}$ e $\underline{\underline{G}}$.

Sviluppiamo ora $e(\underline{\underline{E}})$ in serie di McLaurin in $\underline{\underline{E}}(\underline{\underline{0}})$:

$$e(\underline{\underline{E}}) = \underset{=0}{e(\underline{\underline{0}})} + \underset{=0}{\sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial e}{\partial \underline{\underline{E}}_i} \right]_0 \underline{\underline{E}}_i} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial^2 e}{\partial \underline{\underline{E}}_i \partial \underline{\underline{E}}_j} \right]_0 \underline{\underline{E}}_i \underline{\underline{E}}_j + o(|\underline{\underline{E}}|^3)$$

Il secondo termine risulta nullo (il primo lo è per definizione) perché rappresenta le tensioni $\underline{\underline{G}} = \frac{\partial e(\underline{\underline{E}})}{\partial \underline{\underline{E}}}$ calcolate nello stato naturale, in cui esse sono nulle.

Provando:

$$C_{ij} = \left. \frac{\partial^2 e}{\partial \underline{\underline{E}}_i \partial \underline{\underline{E}}_j} \right|_0 = \left. \frac{\partial^2 e}{\partial \underline{\underline{E}}_j \partial \underline{\underline{E}}_i} \right|_0 = C_{ji}$$

Si ha:

$$e(\underline{\underline{E}}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_{ij} \underline{\underline{E}}_i \underline{\underline{E}}_j \quad \text{con} \quad \underline{\underline{C}} = [C_{ij}] \text{ matrice elastica}$$

$\underline{\underline{C}}$ è matrice elastica e perciò matricialmente si può scrivere:

$$e(\underline{\underline{E}}) = \frac{1}{2} \underline{\underline{E}}^T \underline{\underline{C}} \underline{\underline{E}}$$

Ricordando che $\underline{\underline{G}} = \frac{\partial e}{\partial \underline{\underline{E}}} \Rightarrow \underline{\underline{G}} = \underline{\underline{C}} \underline{\underline{E}}$. $\underline{\underline{C}}$ ha due proprietà:

- è simmetrica;

- è definita positiva: $\frac{1}{2} \underline{\underline{E}}^T \underline{\underline{C}} \underline{\underline{E}} > 0 \quad \forall \underline{\underline{E}} \neq \underline{\underline{0}}$

Così come la densità di energia potenziale elastica era $e(\underline{\underline{E}}) > 0$

In forma indiciale:

$$G_i = \sum_{j=1}^n C_{ij} \underline{\underline{E}}_j$$

Matricialmente scriviamo $\underline{\underline{G}} = \underline{\underline{C}} \underline{\underline{E}}$ come segue:

26

$$\begin{pmatrix} G_x \\ G_y \\ G_z \\ G_{yz} \\ G_{xz} \\ G_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}$$

Ad esempio $G_x = C_{11} E_x + C_{12} E_y + C_{13} E_z + C_{14} \gamma_{yz} + C_{15} \gamma_{xz} + C_{16} \gamma_{xy}$
Essendo $\underline{\underline{C}}$ simmetrico si nota che sono sufficienti 21 componenti per definire il legame (non 36).

Il legame iperelastico inverso

La definizione positiva di $\underline{\underline{G}}(\underline{\underline{E}})$ impone che in ogni trasformazione le forze esterne compiano lavoro positivo (a partire dallo stato naturale). Questa proprietà è detta "stabilità del materiale".

Possiamo esprimere il legame in forma diretta, $\underline{\underline{G}} = \underline{\underline{G}}(\underline{\underline{E}})$, e da ciò discende che $\underline{\underline{G}}(\underline{\underline{E}})$ definito positivo. Esiste anche una forma inversa, $\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{E}}(\underline{\underline{G}})$, che fa uso di una nuova funzione di stato $e^*(\underline{\underline{G}})$ la densità di energia complementare elastica. Essa è tale che:

$$e(\underline{\underline{E}}) + e^*(\underline{\underline{G}}) = \underline{\underline{G}}^T \cdot \underline{\underline{E}}$$

Così:

$$de + de^* = \underline{\underline{G}}^T d\underline{\underline{E}} + \underline{\underline{E}}^T d\underline{\underline{G}}$$

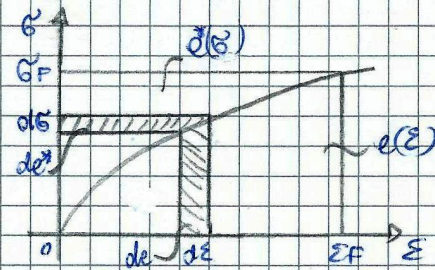
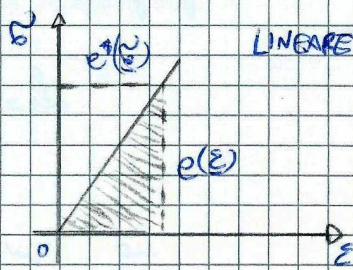
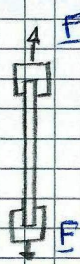
In cui $\underline{\underline{G}}^T d\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{E}}^T d\underline{\underline{G}}$. In analogia a de , de^* è un difференziale esatto e si hanno:

$$de^* = \underline{\underline{E}}^T(\underline{\underline{G}}) d\underline{\underline{G}} \Rightarrow de^* = \left[\frac{\partial e^*}{\partial \underline{\underline{G}}} \right]^T d\underline{\underline{G}} \Rightarrow \underline{\underline{E}}(\underline{\underline{G}}) = \frac{\partial e^*(\underline{\underline{G}})}{\partial \underline{\underline{G}}}$$

Così e^* è la funzione potenziale delle deformazioni. Possiamo definire l'energia complementare elastica:

$$E^* = \int_V e^*(\underline{\underline{G}}) dV$$

Usando una prova monassiale:



Due teoremi energetici

Abbiamo già visto che $\underline{\underline{G}} = \underline{\underline{C}} \underline{\underline{E}}$ e che $e = \frac{1}{2} \underline{\underline{E}}^T \underline{\underline{C}} \underline{\underline{E}} > 0$,
 con $\underline{\underline{C}}$ simmetrico e definita positiva per $\underline{\underline{G}} \neq \underline{\underline{0}}$. $\underline{\underline{C}}$ ha
 36 componenti di cui 21 indipendenti (per iperelasticità).
 Introduciamo $\underline{\underline{H}}$, con le stesse proprietà di simmetria e
 definizione positiva di $\underline{\underline{C}}$ tale che:

$$\underline{\underline{E}}' = \underline{\underline{H}} \cdot \underline{\underline{G}}$$

È stato utile nei due teoremi qui di seguito:

- teorema di Clapeyron. Coniugando il legame lineare in
 forma diretta con quello in forma inversa otteniamo
 i potenziali:

$$e(\underline{\underline{E}}) = \frac{1}{2} \underline{\underline{E}}^T \underline{\underline{C}} \underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} \underline{\underline{G}}^T \underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} \underline{\underline{G}}^T \cdot \underline{\underline{H}} \underline{\underline{G}} = e^*(\underline{\underline{G}})$$

Formula valida per la definizione stessa di $e^*(\underline{\underline{G}})$.

Quindi in uno stato elastico lineare i potenziali $e^*(\underline{\underline{G}})$ e
 $e(\underline{\underline{E}})$ assumono lo stesso valore. Nello stato finale si ha:

$$e(\underline{\underline{E}}_F) = \frac{1}{2} \underline{\underline{G}}_F^T \underline{\underline{E}}_F$$

Per tanto il lavoro specifico di deformazione è pari alla me-
 tà del lavoro che le tensioni compirebbero nelle deformazioni
 finali $\underline{\underline{E}}_F$ se esse agissero direttamente con il loro va-
 lore finale $\underline{\underline{G}}_F = \underline{\underline{C}} \underline{\underline{E}}_F$.

Per ottenere il lavoro interno di deformazione per tutto il
 corpo si deve come al solito integrare!

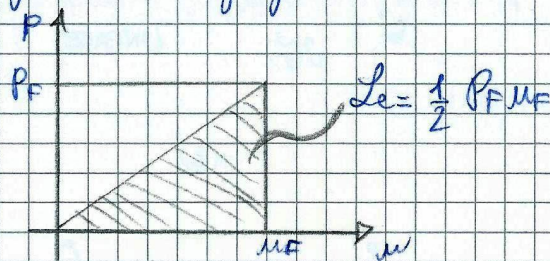
$$L_i = \int_V e(\underline{\underline{E}}_F) dV = \frac{1}{2} \int_V \underline{\underline{G}}_F^T \cdot \underline{\underline{E}}_F dV$$

Nell'intorno della deformazione è valida tale equazione.

Per l'ILV $L_e = L_i$, in cui L_e è:

$$L_e = \frac{1}{2} \int_V \underline{\underline{G}}_F^T \underline{\underline{u}}_F dV + \frac{1}{2} \int_S \underline{\underline{f}}_F^T \underline{\underline{u}}_F dS$$

Possiamo quindi enunciare il teorema di Clapeyron (1852):
 "Il lavoro compiuto dalle forze esterne attive nel processo
 di deformazione quasi-statica di un corpo (linearmente iper-
 elastico con vincoli perfetti) è pari alla metà del lavoro (vir-
 tuale) che le stesse forze compirebbero se agissero direttamen-
 te con il loro valore finale". Graficamente:



teorema di Betti (o di reciprocità). Tenendo conto dell'applicazione quasi-statica delle forze, il teorema di Clapeyron ci assicura che il lavoro esterno prodotto dalle forze dipende solo dai loro valori finali e non dalle modalità di raggiungimento di tali valori. Consideriamo dunque il sistema di forze $F_i = (\underline{b}_i, \underline{f}_i)$ sommandolo nella somma $F = F_a + F_b$, in cui:

$$F_a = (\underline{b}_a, \underline{f}_a) \quad F_b = (\underline{b}_b, \underline{f}_b)$$

F è un generico sistema di forze il loro lavoro di deformazione è (esterno):

$$L = L_a + L_b + L_{ab}$$

L_a e L_b rappresentano il lavoro compiuto dai due sistemi di forze in modo indipendente l'uno dall'altro (F_a sugli spostamenti $\underline{u}_a$ che genera, F_b sugli spostamenti $\underline{u}_b$ che genera):

$$L_a = \frac{1}{2} \int_V \underline{b}_a^T \underline{u}_a dV + \frac{1}{2} \int_S \underline{f}_a^T \underline{u}_a dS$$

$$L_b = \frac{1}{2} \int_V \underline{b}_b^T \underline{u}_b dV + \frac{1}{2} \int_S \underline{f}_b^T \underline{u}_b dS$$

Invece L_{ab} è il lavoro che le forze F_a , raggiunte il loro valore finale, compiono sugli spostamenti $\underline{u}_b$ causati dal successivo sistema F_b :

$$L_{ab} = \int_V \underline{b}_a^T \underline{u}_b dV + \int_{S_F} \underline{f}_a^T \underline{u}_b dS$$

Per la reciprocità è possibile invertire l'ordine delle forze senza che il risultato cambi:

$$\begin{array}{ccc} F_a \leadsto \underline{u}_a \leadsto \underline{u}_b & & F_b \leadsto \underline{u}_b \leadsto \underline{u}_a \\ \uparrow F_b & & \uparrow F_a \end{array}$$

Si scriverà questa volta L_{ba} , lavoro che le forze F_b già presenti compiono sugli spostamenti $\underline{u}_a$ indotti dal successivo sistema F_a :

$$L = L_a + L_b + L_{ba}$$

Con:

$$L_{ba} = \int_V \underline{b}_b^T \underline{u}_a dV + \int_{S_F} \underline{f}_b^T \underline{u}_a dS$$

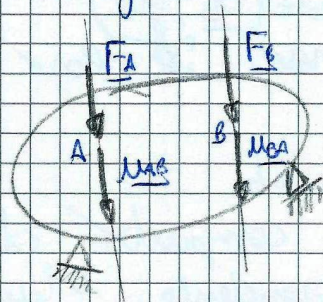
Indipendentemente dal processo di carico si ottiene quindi che $L_{ab} = L_{ba}$.

Il teorema di Betti afferma che (1872): "In un corpo

iperelastico lineare, il lavoro compiuto da un sistema di forze $\vec{F}_A = (\underline{F}_A, \underline{f}_A)$ sugli spostamenti indotti da un sistema di forze $\vec{F}_B = (\underline{F}_B, \underline{f}_B)$ eguaglia il lavoro compiuto da $\vec{F}_B$ sugli spostamenti indotti da $\vec{F}_A$.

Il corollario di Maxwell

Sul teorema di Betti si basa il corollario di Maxwell. Consideriamo il seguente sistema:

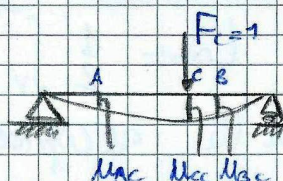
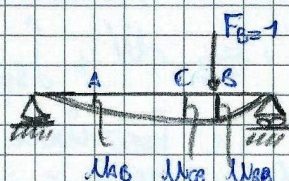
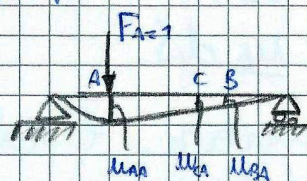


$$L_{AB} = L_{BA} \Rightarrow \underbrace{F_A}_{\text{Spost. in A indotto da } F_B} \underbrace{u_{AB}}_{\text{Spost. in B indotto da } F_A} = \underbrace{F_B}_{\text{Spost. in B indotto da } F_A} \underbrace{u_{BA}}_{\text{Spost. in A indotto da } F_B}$$

$$F_A = F_B = 1 \quad M_{ij} = M_{ji} \quad u_{AB} = u_{BA}$$

Questa è l'equivalenza dei prodotti forze-spostamenti, ci chiediamo se, per la trave continua, per ottenere il momento massimo M_{max} sia necessario caricare tutta la trave o basti caricare solo una parte. Basta solo una parte.

La linea di influenza è un diagramma che riporta in ordinata gli effetti del carico su una certa sezione. Si basa sul teorema di Betti e ci aiuta a capire meglio il corollario di Maxwell:



Il diagramma della linea di influenza dello spostamento in A coincide con la linea elastica prendendo, come si è fatto, $F_A = 1$.

Per il corollario di Maxwell $u_{AB} = u_{BA}$ e $u_{AC} = u_{CA}$.

Il legame elastico lineare omogeneo isotropo

28

È il legame proprio dei materiali che si comportano nello stesso modo in qualsiasi direzione lungo la quale vengano sollecitati. Geometricamente le matrici $\mathbb{C}$ e $\mathbb{H}$ sono invarianti rispetto a qualsiasi rotazione degli assi.

Ci si riduce a due componenti tra loro indipendenti più una dipendente dalle due.

Ricordando che, per la linearità, la densità di energia potenziale elastica $e(\mathbf{\epsilon})$ deve essere una funzione quadratica di $\mathbf{\epsilon}$ avremo che il legame è lineare in $\mathbf{\epsilon}$ rispetto a $\mathbb{I}_2$ e quadratico in $\mathbf{\epsilon}$ rispetto a $\mathbb{I}_1$:

$$e(\mathbb{I}_1, \mathbb{I}_2, \mathbb{I}_3) = a \mathbb{I}_1^2 + b \mathbb{I}_2$$

È una funzione quadratica invariante delle deformazioni in cui:

$$\mathbb{I}_1 = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$$

$$\mathbb{I}_2 = -\epsilon_x \epsilon_y - \epsilon_y \epsilon_z - \epsilon_z \epsilon_x + \frac{\gamma_{yz}^2}{4} + \frac{\gamma_{xz}^2}{4} + \frac{\gamma_{xy}^2}{4}$$

Possiamo scrivere quali sono le componenti di $\mathbb{C}$ nel caso isotropo. Eseguiamo alcune derivate parziali:

$$C_{xx} = \frac{\partial e}{\partial \epsilon_x} = 2a(\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) + b(-\epsilon_y - \epsilon_z)$$

$$C_{yy} = \frac{\partial e}{\partial \epsilon_y} = 2a(\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) + b(-\epsilon_x - \epsilon_z)$$

$$C_{zz} = \frac{\partial e}{\partial \epsilon_z} = 2a(\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) + b(-\epsilon_x - \epsilon_y)$$

$$C_{yz} = \frac{\partial e}{\partial \gamma_{yz}} = b \frac{\gamma_{yz}}{2}$$

Allora $\mathbb{C}$ ha per componenti i coefficienti delle ϵ e delle γ :

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} 2a & 2a-b & 2a-b & 0 & 0 & 0 \\ 2a-b & 2a & 2a-b & 0 & 0 & 0 \\ 2a-b & 2a-b & 2a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b/2 \end{bmatrix}$$

Lamé ha introdotto $\lambda = 2a-b$ e $\mu = \frac{b}{2}$, pertanto:
 $2a = \lambda + 2\mu$

Quindi il legame diretto in forma tensoriale (legge di Hooke):

$$\begin{aligned} G_x &= \lambda(\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) + 2\mu \epsilon_x & G_{yz} &= \mu \gamma_{yz} \\ G_y &= \lambda(\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) + 2\mu \epsilon_y & G_{zx} &= \mu \gamma_{zx} \\ G_z &= \lambda(\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) + 2\mu \epsilon_z & G_{xy} &= \mu \gamma_{xy} \end{aligned}$$

In forma compatta, per componenti:

$$G_{ij} = \lambda I_1 \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}$$

Sfruttando il δ di Kronecker, che ha valore 1 quando $i=j$, valore 0 quando $i \neq j$.

Possiamo anche usare la forma tensoriale:

$$\mathbb{T} = \lambda \Delta \mathbb{I} + 2\mu \mathbb{E}$$

Per scoprire il valore di $\Delta = \text{tr} \mathbb{E}$ esprimiamo la traccia su ambo i membri:

$$\text{tr} \mathbb{T} = 3\lambda \Delta + 2\mu \text{tr} \mathbb{E} = 3\lambda \Delta + 2\mu \Delta$$

Avendo $\text{tr} \mathbb{T} = 1 = 3 \oplus = 3 \cdot \frac{1}{3} (G_x + G_y + G_z)$ si ottiene:

$$\Delta = \frac{3 \oplus}{3\lambda + 2\mu}$$

Perciò:

$$\mathbb{T} = \lambda \frac{3 \oplus}{3\lambda + 2\mu} \mathbb{I} + 2\mu \mathbb{E} \Rightarrow \mathbb{E} = - \frac{3\lambda \oplus}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \mathbb{I} + \frac{1}{2\mu} \mathbb{T}$$

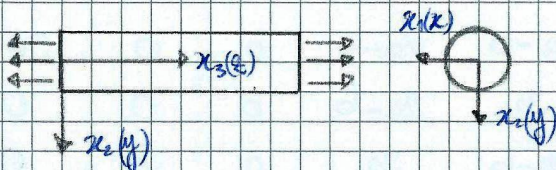
forma diretta forma inversa

In forma inversa e usando le costanti di Lamé abbiamo:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} G_{ij} - \frac{3\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \delta_{ij} \oplus$$

Facciamo ora una prova di pura trazione per guadagnare una forma più diretta delle costanti di Lamé, quella ingegneristica:

$$dF = G_{33} dS = G_2 dS$$



$$G_{33} = \frac{1}{2\mu} G_{33} - \frac{\lambda G_{33}}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}$$

$$\Rightarrow \epsilon_{33} = \frac{3\lambda + 2\mu - \lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} G_{33} = \frac{2\lambda + 2\mu}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} G_{33} = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} = E^{-1} G_{33}$$

E non è la matrice deformativa, ma è il modulo di Young o modulo di elasticità normale. La legge di Hooke diventa:

$$\epsilon_{33} = \frac{1}{E} G_{33} \quad \text{o} \quad \epsilon_z = \frac{1}{E} G_z$$

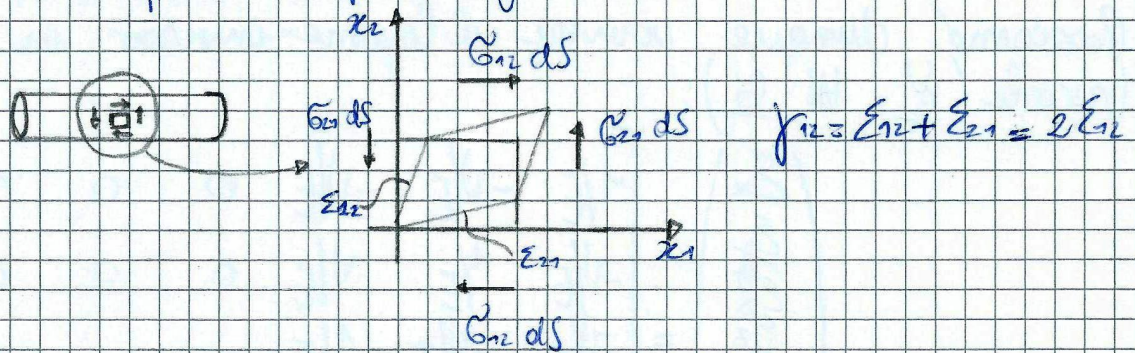
Con G in [MPa] ed E in [GPa]. Allo stesso modo si hanno le componenti trasversali:

$$\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = - \frac{\lambda G_{33}}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}$$

Definiamo rapporto di Poisson il rapporto tra la deformazione longitudinale e quella trasversale:

$$\nu := - \frac{\epsilon_{11}}{\epsilon_{33}} = - \frac{\epsilon_{22}}{\epsilon_{33}} = \frac{1}{2\mu} \frac{G_{33}}{G_{33}} = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{(\mu+1)G_{33}} = \frac{1}{2(\mu+1)}$$

Passiamo alle prove di pure taglio:



Prendendo all'espressione della forma inversa otteniamo:

$$\epsilon_{12} = \frac{1}{2\mu} G_{12} \Rightarrow \gamma_{12} = \frac{G_{12}}{\mu} \Rightarrow \text{definiamo } G := \mu$$

$(\sigma_{12} = 0)$

G è il modulo di elasticità tangenziale.

All'universo abbiamo detto che le componenti tra loro indipendenti sono solo due su tre. Infatti intercorre un legame tra E , G e ν . Per ottenere μ , cioè G usiamo:

$$1 + \nu = 1 + \frac{1}{2(\mu+1)} = \frac{3\lambda+2\mu}{2(\mu+1)} \quad E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{2+\mu}$$

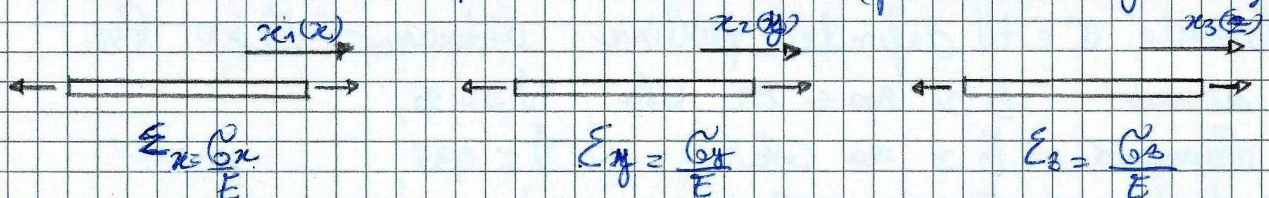
Eseguendo il seguente rapporto:

$$\frac{E}{1+\nu} = 2\mu \Rightarrow G = \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Quindi vale la relazione:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Passiamo alle tre prove monoassiali (permutando gli assi):



$$\epsilon_x = \epsilon_y = -\nu \epsilon_z = -\frac{\nu}{E} G_z \quad \epsilon_x = \epsilon_z = -\nu \epsilon_y = -\frac{\nu}{E} G_y \quad \epsilon_x = \epsilon_y = -\nu \epsilon_z = -\frac{\nu}{E} G_z$$

Sovrapponendo gli effetti si ottiene la legge di Hooke generalizzata:

$$\begin{cases} \epsilon_x = \frac{G_x}{E} - \frac{\nu}{E} (G_y + G_z) \\ \epsilon_y = \frac{G_y}{E} - \frac{\nu}{E} (G_x + G_z) \\ \epsilon_z = \frac{G_z}{E} - \frac{\nu}{E} (G_x + G_y) \end{cases}$$

Inoltre, recuperando il legame tra $\underline{\sigma}$ e $\underline{\epsilon}$:

$$\begin{aligned}\underline{\sigma}_{yz} &= G \gamma_{yz} \Rightarrow \gamma_{yz} = \frac{\underline{\sigma}_{yz}}{G} \\ \underline{\sigma}_{zx} &= G \gamma_{zx} \Rightarrow \gamma_{zx} = \frac{\underline{\sigma}_{zx}}{G} \\ \underline{\sigma}_{xy} &= G \gamma_{xy} \Rightarrow \gamma_{xy} = \frac{\underline{\sigma}_{xy}}{G}\end{aligned}$$

possiamo dunque scrivere il legame inverso in forma matriciale ($\underline{\epsilon} = \underline{H} \cdot \underline{\sigma}$):

$$\begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & 1/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & -\nu/E & 1/E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix}$$

Con E, G in [GPa] e ν adimensionale.

L'adimensionalità di ν consente di dividere in gruppi i materiali. Dato ($\mu, \lambda > 0$ costanti di Lamé):

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} < \frac{1}{2}$$

Definiamo:

- materiali ausiliari (che si espandono se tesi, come il gommone) quelli per cui $-1 < \nu < 0$;

- materiali da costruzione quelli per cui $0 < \nu < 1/2$.

Quando $\nu \rightarrow 1/2$ il materiale è incompressibile, $\Delta V \rightarrow 0$.

Essendo E e H definite positive abbiamo $E > 0$. Per:

- acciai $E \approx 200 \div 250$ GPa, $\nu \approx 0,30$;
- alluminio $E \approx 70$ GPa, $\nu \approx 0,35$;
- calcestruzzo $E \approx 30$ GPa, $\nu \approx 0,15 - 0,20$;
- legno $E \approx 15$ GPa, $\nu \approx 0,40$.

Infine $G = \frac{E}{2(1+\nu)} < \frac{E}{3}$